PART2 定義域が限られた2次関数の最大・最小

要点① 定義域に制限がある2次関数の最大・最小

定義域に制限がある場合の2次関数の最大値，最小値については，グラフを利用して定義域に対する値域を求め，最大値，最小値を求める。

例 2次関数 $y=x^2-2x-1\ (-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値，最小値を求める。

$y=(x-1)^2-2$

$x=-1$ のとき $y=$

$x=2$ のとき　$y=$

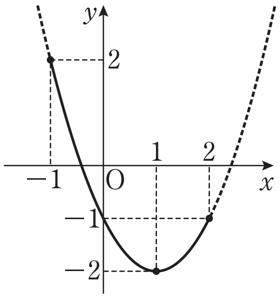
よって，この関数のグラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

$x=$　　で最大値

$x=$　で最小値

をとる。



例 2次関数 $y=-x^2+4x-5\ (3\leqq x\leqq 5)$ の最大値，最小値を求める。

$y=-(x-2)^2-1$

$x=3$ のとき $y=$

$x=5$ のとき $y=$

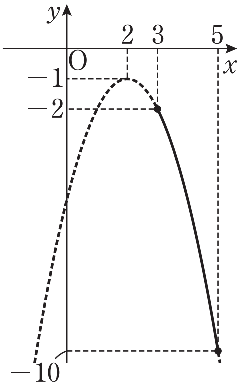
よって，この関数のグラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

$x=$　で最大値

$x=$　で最小値

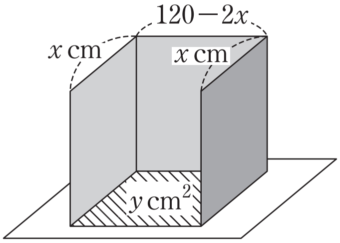
をとる。



要点 ② 2次関数の最大・最小の利用

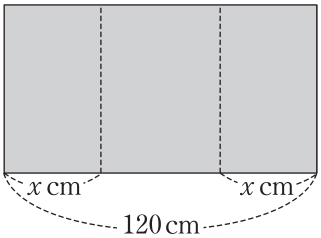
2 次関数を利用して，身近な問題を解決する。

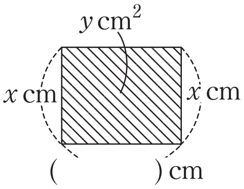
例 横幅 120 cm のダンボールを，右図のように両端から等しい長さだけ 90° に折り曲げ，パーティション(仕切り)を作る。このとき，仕切られたスペース(右図の斜線部分)の面積を最大にするためには，両端から何 cm のところで折り曲げればよいかを求めたい。



折り曲げる長さを x cm とすると，

横幅は (　　　　)cm となる。





x　　，$120-2x$　　より

$0<x<60$ ……①

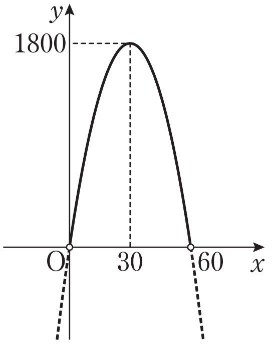
スペースの面積を y cm^2 とすると

$$y=x(120-2x)$$
$$=-2x^2+120x$$
$$=-2(x-30)^2+1800$$

①の範囲におけるこの関数のグラフは，右図実線部分。よって，y は $x=30$ のとき最大値 1800 をとる。

したがって，両端から 30 cm のところで折り曲げればよい。

また，このときのスペースの面積は 1800 cm^2 である。



2 (1) 次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(i) $y=x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 3)$　(ii) $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ $(-2<x\leqq 1)$

(iii) $y=x^2-4x-2$ $(0\leqq x\leqq 4)$　(iv) $y=-x^2+6x+2$ $(4\leqq x\leqq 5)$

(2) ある商品を150円で売ると1日平均で1000個売れ，180円で売ると1日平均で880個売れる見込みである。

(i) この商品を150円, 180円のどちらの価格で売った方が1日平均の売上高が大きいか。

(ii) この商品の売価と1日平均の売れる個数が比例関係にあると仮定すると，この商品を1円値上げすると，売り上げ個数は1日平均で4個減少すると予想される。この予想をもとに，この商品の売価をいくらにすると，1日平均の売上高が最大になるかを求めよ。

Point Pickup

定義域に制限がある2次関数の最大・最小

定義域に制限がある場合の2次関数の最大値，最小値は

グラフの軸におけるyの値(頂点のy座標)と，定義域の端におけるyの値を比較して求める。主な手順は以下。

① 平方完成し，グラフを　　　でかく。

② ①のグラフにおいて，与えられた定義域に相当する部分を　　　にする。

定義域の端の点(端点)が含まれない場合は，点を「○」とする。

③ 頂点と端点に注目し，最大値，最小値を求める。

第 8 講　PART2 確認問題

1　次の 2 次関数の最大値，最小値を求めよ。

$y=x^2\quad(-2\leqq x\leqq 1)$

最大値 ア，最小値 イ

2　次の 2 次関数の最大値，最小値を求めよ。

$y=-2x^2+10\quad(1\leqq x\leqq 2)$

最大値 ウ，最小値 エ

3　次の 2 次関数の最大値，最小値を求めよ。

$y=x^2-2x+5\quad(0\leqq x\leqq 3)$

最大値 オ，最小値 カ

4　次の 2 次関数の最大値，最小値を求めよ。

$y=-x^2+4x+6\quad(-1\leqq x\leqq 1)$

最大値 キ，最小値 ク

5 ある店の商品 A は，売り値が 60 円のときは 1 日に 400 個売れる。また，売り値を 60 円から 1 円値上げするごとに，1 日に売れる個数が 5 個ずつ減少するという。
商品 A の売り値は 60 円以上として，いくらのときに 1 日の売り上げ高が最大になるかを求める。

売り値を 60 円から x 円値上げしたときの 1 日の売り上げ高を y 円とする。

1 日に売れる個数は $\left(400-\boxed{\text{ケ}}\,x\right)$ 個だから，

$x \geqq 0$，$400-\boxed{\text{ケ}}\,x \geqq 0$ より，

$$0 \leqq x \leqq \boxed{\text{コサ}} \quad \cdots\cdots①$$

y は，

$$y=(60+x)\left(400-\boxed{\text{ケ}}\,x\right)$$
$$=-\boxed{\text{シ}}\left(x^2-\boxed{\text{スセ}}\,x-4800\right)$$

であり，①の範囲で y は $x=\boxed{\text{ソタ}}$ のとき最大となる。

よって，商品 A の売り値を $\boxed{\text{チツ}}$ 円にしたときに売り上げ高が最大となる。

【MEMO】

PART2 定義域が限られた 2 次関数の最大・最小

2 (1) 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(i) $y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 3)$　(ii) $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2\ (-2<x\leqq 1)$

(iii) $y=x^2-4x-2\ (0\leqq x\leqq 4)$　(iv) $y=-x^2+6x+2\ (4\leqq x\leqq 5)$

(2) ある商品を 150 円で売ると 1 日平均で 1000 個売れ，180 円で売ると 1 日平均で 880 個売れる見込みである。

(i) この商品を 150 円, 180 円のどちらの価格で売った方が 1 日平均の売上高が大きいか。

(ii) この商品の売価と 1 日平均の売れる個数が比例関係にあると仮定すると，この商品を 1 円値上げすると，売り上げ個数は 1 日平均で 4 個減少すると予想される。この予想をもとに，この商品の売価をいくらにすると，1 日平均の売上高が最大になるかを求めよ。

[解答]

(1)(i) $y=x^2$

$x=-1$ のとき $y=1$

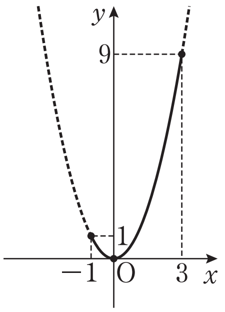
$x=3$ のとき $y=9$

よって，この関数のグラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

$x=3$ で最大値 9，$x=0$ で最小値 0

をとる。



(ii) $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2$

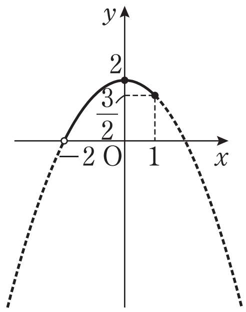
$x=-2$ のとき $y=0$

$x=1$ のとき $y=\dfrac{3}{2}$

よって，この関数のグラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

$x=0$ で最大値 2 をとり，最小値はない



(iii) $y=x^2-4x-2=(x-2)^2-6$

　$x=0$ のとき $y=-2$

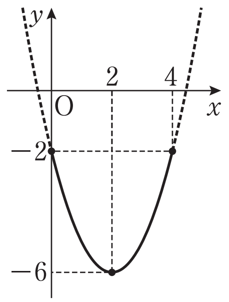
　$x=4$ のとき $y=-2$

よって，この関数のグラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

　$x=0$，4 で最大値 -2，$x=2$ で最小値 -6

をとる。



(iv) $y=-x^2+6x+2=-(x-3)^2+11$

　$x=4$ のとき $y=10$

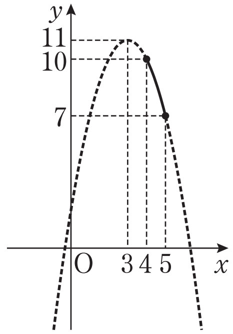
　$x=5$ のとき $y=7$

よって，この関数のグラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

　$x=4$ で最大値 10，$x=5$ で最小値 7

をとる。



(2)(i) 売価が 150 円のとき，売上高は $150\times1000=150000$ (円)

売価が 180 円のとき，売上高は $180\times880=158400$ (円)

よって，180 円で売った方が 1 日平均の売上高が大きい。

(ii) 150 円から売価を x 円値上げすると，1 日平均の売り上げ個数は 1000 個から $4x$ 個減少する。

　$x\geqq0$ かつ $1000-4x\geqq0$ より $0\leqq x\leqq250$

1 日平均の売上高を y 円とすると

　$y=(150+x)(1000-4x)$

　　$=-4x^2+400x+150000$

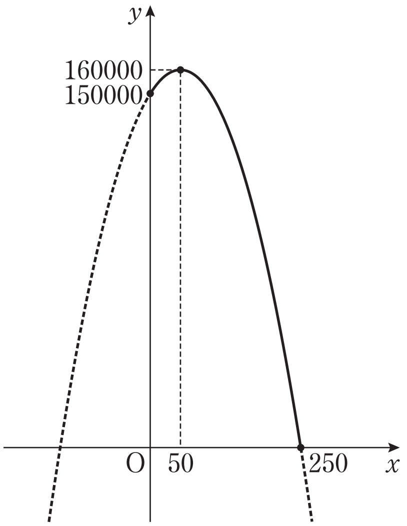
　　$=-4(x-50)^2+160000$

よって，y は $x=50$ のとき最大値 160000 をとる。

したがって，この商品の売価を

　$150+50=200$ (円)

にすると，1 日平均の売上高が最大になる。



第 8 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：0

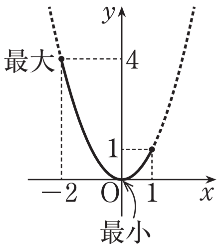
[解説]

$y=x^2$

$x=-2$ のとき，$y=4$

$x=1$ のとき，$y=1$

よって，この関数のグラフは次の図の実線部分である。



したがって，この関数は，[A]

$x=-2$ で最大値 4

$x=0$ で最小値 0

をとる。

[A]　グラフをかいて，定義域の端点と頂点に注目し，最大値，最小値を求める。

2

[正解] ウ：8，エ：2

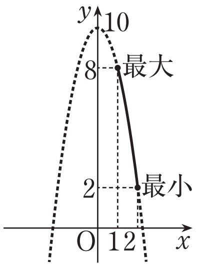
[解説]

$y=-2x^2+10$

$x=1$ のとき，$y=8$

$x=2$ のとき，$y=2$

よって，この関数のグラフは次の図の実線部分である。



したがって，この関数は，[B]

$x=1$ で最大値 8

$x=2$ で最小値 2

をとる。

[B]　グラフをかいて，定義域の端点と頂点に注目し，最大値，最小値を求める。

3 **[正解]** **オ**：8，**カ**：4

[解説]

$y=x^2-2x+5$

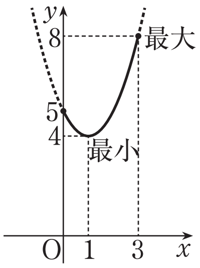
$=(x-1)^2-1+5$

$=(x-1)^2+4$ [C]

$x=0$ のとき，$y=5$

$x=3$ のとき，$y=8$

よって，この関数のグラフは次の図の実線部分である。



したがって，この関数は，

$x=3$ で最大値 8

$x=1$ で最小値 4

をとる。

[C]　まず平方完成をする。
次に，グラフをかいて，定義域の端点と頂点に注目し，最大値，最小値を求める。

4 **[正解]** **キ**：9，**ク**：1

[解説]

$y=-x^2+4x+6$

$=-(x^2-4x)+6$

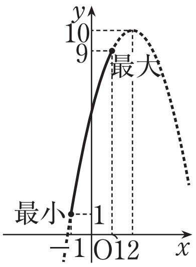
$=-\{(x-2)^2-4\}+6$

$=-(x-2)^2+10$ [D]

$x=-1$ のとき，$y=1$

$x=1$ のとき，$y=9$

よって，この関数のグラフは次の図の実線部分である。



したがって，この関数は

$x=1$ で最大値 9

$x=-1$ で最小値 1

をとる。

[D]　まず平方完成をする。
次に，グラフをかいて，定義域の端点と頂点に注目し，最大値，最小値を求める。

5 **[正解]** **ケ**：5，**コサ**：80，**シ**：5，**スセ**：20，
ソタ：10，**チツ**：70

[解説]

売り値を 60 円から x 円値上げしたときの 1 日の売り上げ高を y 円とする。

1 日に売れる個数は **$(400-5x)$** 個だから，

$x \geqq 0$，$400-5x \geqq 0$ より，

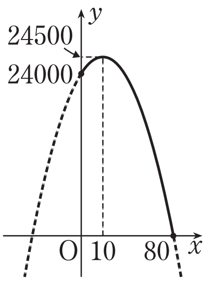
$$\mathbf{0 \leqq x \leqq 80} \quad \cdots\cdots ①$$

y は，

$$y=(60+x)(400-5x) \quad \text{[E]}$$
$$=\mathbf{-5(x^2-20x-4800)}$$
$$=-5\{(x-10)^2-100-4800\}$$
$$=-5(x-10)^2+24500 \quad \text{[F]}$$

であり，①の範囲で y は **$x=10$** のとき最大値 24500 をとる。

よって，商品 A の売り値を **70 円**にしたときに売り上げ高が最大となる。



[E]　$y=$(売り値)×(個数)

[F]　定義域 $(0 \leqq x \leqq 80)$ での最大値を考える。